Colles de Maths - semaine 19
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

— $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

— Théorème de la base extraite

— Théorème de la base incomplète

— Dimension d'un produit d'espace vectoriel

— Existence et unicité d'un supplémentaire en dimension finie

— Formule de Grassmann

— Théorème du rang

— Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$
2. $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
3. $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$
4. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, E^* son espace dual.

1. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. On note e_i^* l'application qui à un vecteur $x \in E$ fait correspondre sa coordonnée devant e_i. Montrer que $(e_i^*)_i$ est une base de E^*.
2. Réciproquement, soit $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une base (e_i) de E telle que pour tout i, $e_i^* = f_i$.

Matrices

Exercice 3 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Montrer que A est de rang 1 si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $A = X^tY$.

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$.

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4, et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre 2. Soit $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base soit $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & C_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in \{1, ..., n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 7 Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(AB) = f(A)\, f(B)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.